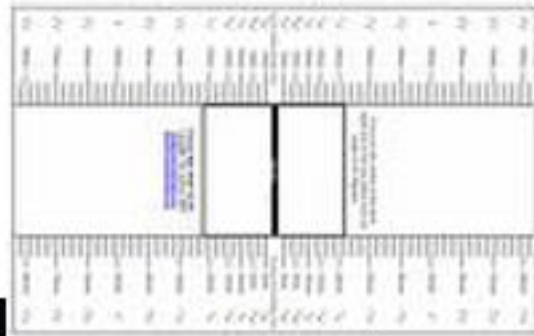


ALGUNAS MEDIDAS

SOBRE

JUPITER



José Carlos Domínguez.

ÍNDICE

1.- Introducción.	5
2.- Achatamiento.	5
3.- Latitud de algunos accidentes jovianos.	7
4.- Rotación de Júpiter.	8
5.- Tamaño angular de Júpiter.	11
6.- Distancia Tierra-Júpiter.	13
7.- Radio y volumen de Júpiter.	15
8.- Tamaño de la Gran Mancha Roja (GRS).	16
9.- Seguimiento de los satélites de Júpiter.	17
10.- Resonancia de Laplace.	21
11.- Masa de Júpiter.	22
12.- Densidad de Júpiter.	26
13.- Velocidad de escape.	26
14.- Impacto de Julio de 2.009.	27
14.1.- Latitud del impacto.	28
14.2.- Periodo de rotación de la mancha del impacto.	28
14.3.- Forma y dimensiones de la mancha del impacto.	29
BIBLIOGRAFÍA:	30

ALGUNAS MEDIDAS SOBRE JUPITER.

En las publicaciones que se encuentran sobre Astronomía, especialmente las dedicadas al Sistema Solar, puede verse una gran cantidad de datos relativos a masas, tamaños, distancias, periodos de rotación y traslación de planetas y satélites,... que siempre han despertado mi curiosidad. En realidad, no sé que me ha llamado más la atención, si el hecho de que podamos conocer tantos números relativos a nuestro entorno astronómico o el hecho de que en la inmensa mayoría de todas estas publicaciones no se trate en absoluto la forma en la que se pueden obtener tales medidas.

Tan solo han llegado a mis manos, después de mucho tiempo leyendo publicaciones de divulgación astronómica, dos libros que intenten dar explicación, a un nivel asequible, de cómo se han obtenido muchos de estos datos.

Conozco también de la existencia de programas informáticos que nos ayudan a calcular algunas medidas sin más que meter los datos necesarios. Y casi con toda seguridad se obtendrán datos más precisos que los que nosotros vayamos a obtener, pero el objetivo que se persigue en este texto, entiendo que es algo más de fundamentos, que el conocer un frío dato.

Desde mi visión de aficionado, encuentro bastante interesante ser capaz de sacar información y de ver alguna utilidad a las observaciones y fotografías que pueda realizar. Es por esto por lo que, desde hace años intento obtener mi propia información, tomar mis propias medidas desde los medios a mi alcance. Ni que decir tiene que son medidas que están limitadas no sólo por los aparatos utilizados, sino también por los métodos "físicos" de que dispongo. Aún así, con estas limitaciones, mi experiencia me dice que con

unos mínimos conocimientos sobre "trigonometría plana", sobre "las leyes de Kepler y de Newton" y "la ley de Gravitación Universal", y poniendo algo de esmero y rigor en las mediciones, se pueden conseguir medidas que se ajustan bastante a las reales, o al menos a las que se aceptan en la actualidad como reales.

Pensando en que es probable que alguien encuentre interesante el poder tomar sus propias medidas y procesar sus propios datos, me animo a describir como he hecho un seguimiento a Júpiter durante las oposiciones de 2.008 y 2.009, para obtener algunos de los números que aparecen en las publicaciones. De la misma forma, si alguien encuentra mejorable alguno de los métodos, cualquier sugerencia que se encuadre en el marco general de este escrito, para obtención de datos de manera asequible a nivel de aficionado, será bien recibida. Siempre serán mejorables las medidas si utilizamos más herramientas teóricas. Un mínimo conocimiento sobre "trigonometría esférica" y sobre "mecánica celeste", sin duda ninguna mejorarán resultados y darán fundamento a muchos de los estudios, pero no es esto lo que persigue este escrito. Muy al contrario, pretende animar al mayor número de personas a obtener sus propios datos.

El material utilizado para la obtención de datos de todos los estudios que se describen han sido básicamente tres tubos ópticos, un refractor de 152 mm, un SCT de 254 mm y un SCT de 280 mm, un ocular micrométrico de 12.5 mm para la toma de medidas angulares y dos webcam para las tomas fotográficas.

Con carácter general, en cada apartado intentaré hacer una mínima descripción teórica de cómo obtener cada dato y posteriormente lo aplicaré al caso concreto que nos ocupe.

1.- Introducción.

Ha transitado Júpiter en estas oposiciones 2.008 y 2.009 por las constelaciones de Sagitario, Capricornio y Acuario. El día 9 de Julio alcanzó su oposición en 2.008 y el 14 de Agosto la de 2.009.

Desde nuestras latitudes, atraviesa una zona no muy alta del cielo, lo que no favorece la observación visual ni la obtención de buenas fotografías.

2.- Achatamiento.

En el año 1.784 aparece la publicación de Laplace: "Theorie du mouvement et de la figure elliptique des planetes" (Teoría del movimiento y de la forma elíptica de los planetas). La publicación constaba de dos partes:

- La primera se refiere precisamente a los principales movimientos de los objetos celestes, en el que cabe destacar un estudio sobre la órbita de Urano.
- La segunda parte lleva por título: "Sobre la forma de los planetas", y realiza un estudio en profundidad sobre la atracción gravitacional de los elipsoides.

Analizando la velocidad angular de los elipsoides de revolución obtuvo resultados que explicaban el achatamiento de los polos terrestres.

Trató de demostrar a partir de los desarrollos teóricos desplegados en el libro, que los planetas, sometidos a la acción gravitatoria sólo podían tener forma de elipsoides achatados en sus polos.

Toda esta teoría ha sido superada, pero para algunos problemas planteados sigue siendo útil y suficiente pensar en los planetas como elipsoides de revolución. Nosotros simplificaremos aún más nuestros cálculos, pensando la mayoría de las veces (si no, todas) que Júpiter es una esfera perfecta.

Hecho todo este relato, nos centramos nosotros ahora en lo que podemos hacer con nuestras fotografías en relación al achatamiento, que es sin duda y al margen de cualquier otra consideración física, medirlo.

Se mide el achatamiento de un planeta, a través de la fórmula:

$$A = \frac{R.Ecuatorial - R.polar}{R.ecuatorial}.$$

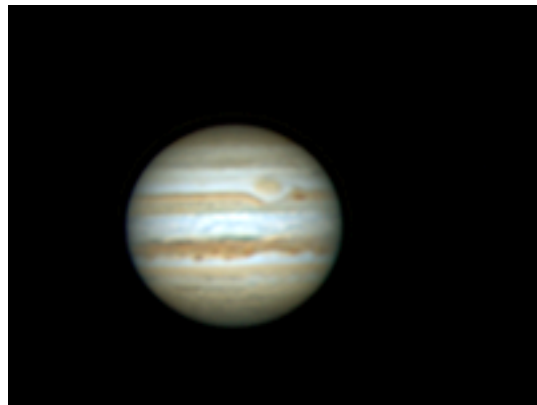
No tenemos problema ninguno para calcular esta razón, pues aunque no conozcamos los valores del radio ecuatorial real ni del radio polar real de Júpiter, si conocemos que guardan con las medidas en la fotografía una relación de proporcionalidad directa. Podemos establecer por tanto que:

$$A = \frac{R.ecuatorial(foto) - R.polar(foto)}{R.ecuatorial(foto)}$$

Ayudándome de las fotografías siguientes, una de la oposición de 2.008 y otra de la de 2.009, estimo para el achatamiento de Júpiter los siguientes valores:



31-07-2008 SCT 254 mm F/30



22-08-2009 SCT 280mm F/20

Para la primera de las fotografías obtengo un valor para A de

$$A = 6,667.10^{-2}.$$

Para la segunda $A = 6,429.10^{-2}$

Haciendo un promedio de ambos valores se obtiene:

$$A = 6,548.10^{-2}.$$

Para este valor obtenido, quisiera hacer un par de observaciones:

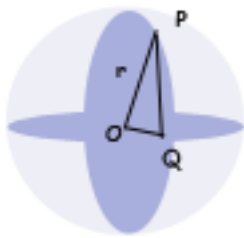
- La primera de ellas tiene que ver con el grado de precisión. El dato bibliográfico que obtengo es que el valor aceptado de achatamiento de Júpiter es de $6,490.10^{-2}$.

- La segunda tiene que ver con la gran diferencia existente con el dato relativo al achatamiento de la Tierra, para la que se acepta un valor de $3,367.10^{-3}$.

3.- Latitud de algunos accidentes jovianos.

Calcular la latitud de un accidente sobre una superficie esférica, es simplemente medir el ángulo que forma el segmento que une el centro de la esfera con dicho accidente y el plano ecuatorial de la esfera.

Geométricamente, la latitud del accidente P correspondería a medir la amplitud del ángulo \hat{O} de la figura.



Admitiendo que Júpiter es realmente una esfera, (algo que acabamos de ver que no ocurre) y que por tanto cada meridiano es una circunferencia, para calcular una aproximación de la amplitud de \hat{O} basta acudir a la trigonometría plana, concretamente a la definición de seno de un ángulo. Según esta definición ocurre:

$$\text{sen}(\hat{O}) = \frac{PQ}{r}$$

Ahora bien, "r" es el radio de la esfera (algo que podemos medir en nuestras fotografías), y para el segmento PQ podemos tomar la medida aproximada del segmento vertical trazado desde el accidente P hasta su corte con la sección del ecuador del planeta (esta medida no corresponde exactamente a la del segmento PQ, por eso hablamos de aproximación).

La latitud del accidente P vendrá dada de esta manera por:

$$\text{lat}(P) = \hat{O} = \arcsen\left(\frac{PQ}{r}\right)$$

El accidente más llamativo y característico de Júpiter es, sin duda alguna su Gran Mancha Roja (GRS). Podemos utilizar el método descrito para calcular entre que dos latitudes se encuentra (es muy grande para considerarla como un punto sobre la superficie del planeta).

He hecho las mediciones pertinentes sobre varias fotografías, pues siempre los promedios regularizan los resultados. Esta vez he utilizado la siguiente composición de fotografías, tomadas el día 22 de Agosto de 2.009.



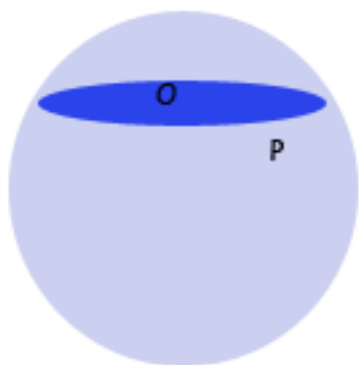
Obtengo los siguientes resultados: la gran mancha roja, se encuentra en las fechas en las que se han tomado las fotografías entre las latitudes $17,88^{\circ}\text{S}$ y $26,46^{\circ}\text{S}$. (no olvidemos que la GRS se encuentra en el hemisferio sur del planeta).

El seguimiento sistemático de estos números, las latitudes entre las que se encuentra, puede ser un instrumento para seguir la evolución en sus cambios de tamaño.

No encuentro muchos datos bibliográficos con los que comparar estos cálculos, pero en los pocos que he visto, se sitúa a la gran mancha roja en torno al paralelo 22°S , no andan por tanto nuestros cálculos muy desencaminados.

4.- Rotación de Júpiter.

Calcular el periodo de rotación de un accidente situado sobre la superficie de un planeta, es simplemente determinar el tiempo que tarda el accidente en recorrer los 360° de su paralelo de tránsito correspondiente.



Para abordar el problema del cálculo del periodo de rotación, podemos proceder de dos maneras:

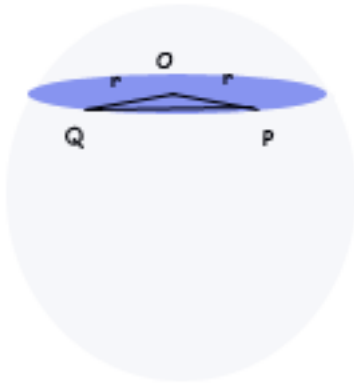
- La primera opción es seguir el accidente en cuestión ininterrumpidamente hasta que pase dos veces consecutivas por el

mismo meridiano. Si tomamos el tiempo transcurrido entre estos dos tránsitos consecutivos, no cabe duda de que estamos calculando el periodo de rotación de este accidente.

- Otra opción, algo más relajada y que hace más corto el tiempo de seguimiento, es que seamos capaces de medir de alguna manera, el ángulo que se desplaza el accidente en un tiempo determinado a lo largo de su paralelo. La comodidad y relajación en el seguimiento hay que compensarla con algo de ingenio para poder calcular el ángulo en cuestión. Nada que no seamos capaces de hacer con unos mínimos conocimientos de trigonometría plana y de su aplicación para resolución de triángulos.

La opción por la que nos decantamos es esta segunda, y el método seguido es el que describimos a continuación:

Hay que fijarse en principio en un accidente del que tengamos cierta certeza que es un detalle estable sobre la superficie visible, y hay que tener perfectamente claro cual es el paralelo por el que transita.



Determinado el accidente y teniendo claro el paralelo por el que transita, hay que tomar su posición exacta en dos momentos de tiempo que anotaremos con la máxima precisión posible. Notemos por P a la posición del accidente en el instante t_0 y por Q a la posición del accidente en el instante t_1 . Fijémonos ahora en el triángulo plano de vértices OPQ, donde O es el centro del paralelo por el que transita el accidente. Nuestra pretensión es calcular la amplitud del ángulo \hat{O} .

Para ello contamos con que en el triángulo OPQ, los segmentos OP y OQ son radios del paralelo en cuestión, y por tanto medibles en nuestras fotografías. También el segmento lineal PQ es algo que podemos medir a través de nuestras tomas (no medimos exactamente el segmento lineal PQ sino el arco de circunferencia PQ, aquí está la aproximación, junto a la presunción de que Júpiter es una esfera). Más aún, dado que $OP = OQ = r$, tenemos que nuestro triángulo es isósceles, y por tanto $\hat{P} = \hat{Q}$.

Como además ocurre que: $\hat{O} + \hat{P} + \hat{Q} = 180^\circ$, según Euclides, tendremos:

$$\hat{O} + 2\hat{P} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{P} = 180^\circ - \hat{O} \Rightarrow \hat{P} = \frac{180^\circ - \hat{O}}{2} \quad \text{i. e. : } \hat{P} = 90^\circ - \frac{\hat{O}}{2}.$$

Todos los elementos no conocidos de nuestro triángulo (los ángulos), se pueden expresar en función de \hat{O} .

En virtud del teorema de los senos, podemos escribir:

$$\frac{OP}{\text{sen}\hat{P}} = \frac{PQ}{\text{sen}\hat{O}} \quad \text{i. e. : } OP \cdot \text{sen}\hat{O} = PQ \cdot \text{sen}\left(90^\circ - \frac{\hat{O}}{2}\right).$$

La relación entre el coseno de un ángulo y el seno de su complementario, permiten escribir: $OP \cdot \text{sen}\hat{O} = PQ \cdot \cos\left(\frac{\hat{O}}{2}\right) \Rightarrow OP \cdot \text{sen}\left(\frac{\hat{O}}{2} + \frac{\hat{O}}{2}\right) = PQ \cdot \cos\left(\frac{\hat{O}}{2}\right)$

, y el desarrollo del seno de la suma: $OP \cdot 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\hat{O}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\hat{O}}{2}\right) = PQ \cdot \cos\left(\frac{\hat{O}}{2}\right)$.

Como además tenemos certeza de que $0 < \hat{O} < 180^\circ$ i.e. : de que $0 < \frac{\hat{O}}{2} < 90^\circ$, tenemos que: $\cos\left(\frac{\hat{O}}{2}\right) \neq 0$, y por tanto: $OP \cdot 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\hat{O}}{2}\right) = PQ$

De donde: $\text{sen}\left(\frac{\hat{O}}{2}\right) = \frac{PQ}{2 \cdot OP}$. Así: $\frac{\hat{O}}{2} = \arcsen\left(\frac{PQ}{2 \cdot OP}\right)$ Y por tanto:

$$\hat{O} = 2 \cdot \arcsen\left(\frac{PQ}{2 \cdot OP}\right).$$

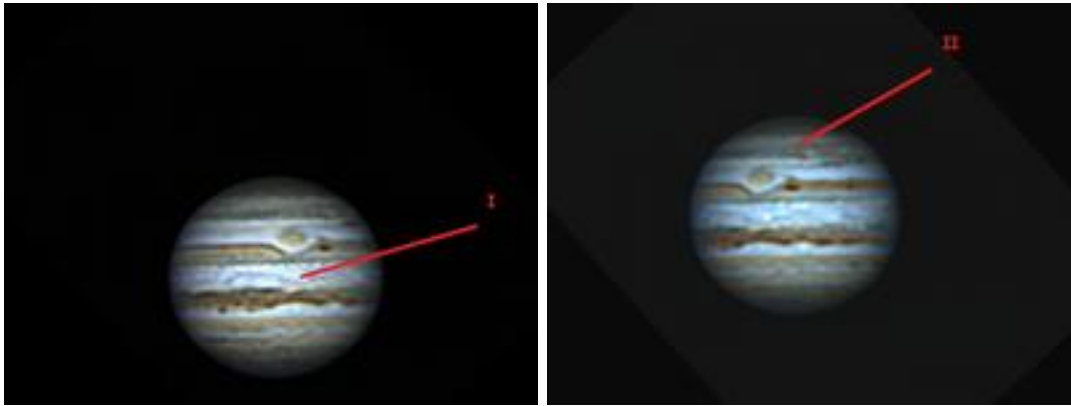
Se calcula de esta manera el ángulo \hat{O} que se ha desplazado el accidente en el tiempo $t_1 - t_0$. Para calcular el tiempo que necesita para recorrer los 360° del paralelo completo, basta hacer ahora una regla de tres.

De esta manera, relativamente simple, se puede calcular el periodo de rotación de cualquier accidente distinguible sobre la superficie de cualquier planeta.

Hablemos ahora del caso concreto de Júpiter:

Los aficionados, en general, conocemos el hecho de que Júpiter es un planeta gigante del que visualizamos una capa externa llena de nubes y gases. Además, no lleva un mismo periodo de rotación todo el planeta de manera uniforme, sino que hay establecidos unos sistemas de rotación distintos dependiendo de las latitudes del planeta. Pues bien, ahora es el momento de que nosotros comprobemos a través de nuestros cálculos todo esto que leemos en cualquier publicación.

Sobre las siguientes fotografías, también tomadas el día 22 de Agosto de 2.009, y haciendo un seguimiento de los accidentes que señalo, I para el sistema I y II para el sistema II, he estimado los periodos de rotación para los dos sistemas jovianos, obteniendo los siguientes resultados:



Para el sistema I obtengo que entre la fotografía primera, tomada a las 21.33 t.u. y la segunda, a las 22.21 t.u. el accidente seleccionado se ha desplazado un ángulo de $29,446^\circ$, lo que hace que el periodo de rotación de este accidente concreto sea de aproximadamente: 9 h. 46 m.

Para el sistema II, entre la fotografía tomada a las 21.33 t.u. y la tomada a las 22.21 t.u. el accidente seleccionado se ha desplazado un ángulo de $28,739^\circ$, lo que equivale a un periodo de rotación de aproximadamente: 10 h. 01 m.

5.- Tamaño angular de Júpiter.

Basta disponer de un ocular micrométrico y conocer la distancia focal precisa del telescopio con el que hacemos la medición para, tras utilizar una sencilla fórmula, conocer el tamaño angular del objeto medido.

Para Júpiter, y utilizando un SC de 10" en 2.008 y un SC de 11" en 2.009, junto con un ocular micrométrico de 12.5 mm estimo un tamaño angular en los días próximos a la oposición de 2.008 de $49,50''$ y en los días próximos a la oposición de 2.009 de $49,72''$.

El hecho de que estas medidas no coincidan viene a confirmar que las órbitas de ambos planetas no forman círculos concéntricos alrededor de un centro común situado en el Sol.

Unas medidas precisas, rigurosas y continuadas año tras año de este diámetro, sobre todo de estas diferencias, nos pueden dar una buena idea de las distancias relativas entre la Tierra y Júpiter. En una primera aproximación nos pueden decir al menos cuando estamos más lejos o más cerca del planeta gigante. Según estas medidas tomadas por nosotros, parece que en el año 2.009 hemos estado más cerca de lo que lo estuvimos el año pasado.

Incluso nos podemos aventurar, con algo de imaginación a calcular la razón entre ambas distancias.

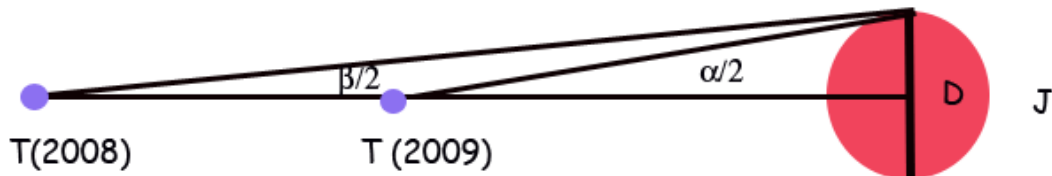
Observemos la siguiente figura:

T(2008) posición de la Tierra en la oposición 2008

T(2009) posición de la Tierra en la oposición 2009

α tamaño angular 2009

β tamaño angular 2008



a = distancia de T(2008) a Júpiter

b = distancia de T(2009) a Júpiter

D = diámetro de Júpiter

Si lo que pretendemos es conocer el valor de la razón: " a/b ", i.e.: el valor de:

(distancia de la Tierra a Júpiter en 2008)/(distancia de la Tierra a Júpiter en 2009), basta observar lo siguiente:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{D}{2a} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{D}{2b} \quad . \text{ Ocurre, de esta manera:}$$

$$D = 2a \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad \text{y} \quad \text{también:} \quad D = 2b \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad . \text{ Por lo que:}$$

$$2a \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2b \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad . \quad \text{De donde deducimos:}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad .$$

Número que, con nuestras mediciones para α y β , es bastante fácil de calcular. Concretamente para los valores de $\alpha = 49,72''$ y $\beta = 49,50''$,

obtengo una razón de: $\frac{a}{b} = 1,004$ i. e.:

$$a = 1,004.b$$

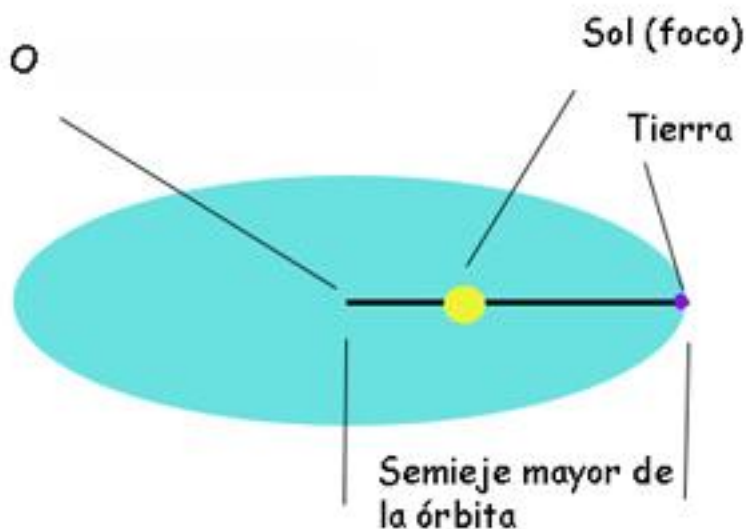
6.- Distancia Tierra-Júpiter.

Hacia 1619 y 10 años después de haber enunciado sus dos primeras leyes, Johannes Kepler, en su obra "Harmonices mundi" anunció el descubrimiento de su tercera ley: "la relación entre el cuadrado del periodo de revolución de un planeta en torno al Sol y el cubo del semieje mayor de su órbita permanece constante, para todos los planetas". En otras palabras, si llamamos T al tiempo que tarda un planeta en recorrer su órbita, y R al semieje mayor de la elipse descrita por dicha órbita, se cumple que el cociente: $\frac{T^2}{R^3}$ toma el mismo valor para cualquier planeta.

Años más tarde, Isaac Newton, corroboró teóricamente que debía ser así en efecto, y llegó a comprobar como el valor de dicha constante lo determina básicamente la masa del Sol, pero esto lo trataremos nosotros algo más adelante, por ahora sigamos con esta tercera ley de Kepler.

Desde el momento en que esta ley quedó enunciada, las distancias relativas entre los planetas conocidos (6 por aquella época) estaban determinadas sin más que conocer sus periodos de traslación.

Como ejemplo y dado que el estudio que nos ocupa es el del planeta gigante, podemos determinar la distancia entre la Tierra y Júpiter en función de la distancia entre la Tierra y el centro de su órbita elíptica, i.e.: en función del semieje mayor de la órbita terrestre, que no es la distancia entre la Tierra y el Sol, como el propio Kepler asegura en su primera ley, que sitúa al Sol en uno de los focos de la elipse.



Podemos nosotros, no obstante, y como venimos haciendo habitualmente, simplificar el

problema haciendo coincidir el centro de la elipse con el foco, i. e.: suponiendo que las órbitas son circulares y concéntricas, con centro en el Sol. Como primer acercamiento al problema podemos hacerlo así, siempre podemos afinar los resultados considerando las órbitas elípticas y por tanto complicando algo los razonamientos más adelante.

Si hacemos esto, i. e.: si suponemos las órbitas de los planetas en circunferencias concéntricas con centro en el Sol (aunque sepamos ya, por lo comprobado anteriormente, que esto no es cierto), y tomamos como unidad la distancia entre la Tierra y el Sol, "d(T,S)", basta conocer el hecho de que el periodo de traslación de Júpiter alrededor del Sol es de 11,8623 años terrestres, para obtener la siguiente relación:

$$\frac{T_J^2}{R_J^3} = \frac{T_T^2}{R_T^3}; \quad \text{i. e.:} \quad \frac{(11,8623 \text{ años})^2}{(d(\text{Sol}, \text{Jupiter}))^3} = \frac{(1 \text{ año})^2}{(d(T, S))^3}$$

De donde: $(d(\text{Sol}, \text{Jupiter}))^3 = \frac{(11,8623)^2 \cdot (d(T, S))^3}{1^2}$; y por tanto:

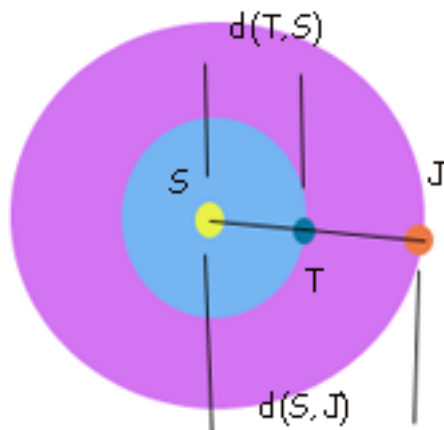
$$d(\text{Sol}, \text{Jupiter}) = \sqrt[3]{(11,8623)^2 \cdot (d(T, S))^3} . \quad \text{En consecuencia:}$$

$$d(\text{Sol}, \text{Jupiter}) = d(T, S) \cdot \sqrt[3]{(11,8623)^2} . \quad \text{De donde obtenemos:}$$

$$d(\text{Sol}, \text{Jupiter}) \approx 5,2013 \cdot d(T, S) .$$

Según esto, Júpiter se encuentra del Sol, aproximadamente unas 5,2013 veces más lejos que la Tierra.

En los momentos de oposición de la Tierra y Júpiter en los que ocurre:



$$d(\text{Sol}, \text{Jupiter}) = d(T, S) + d(\text{Tierra}, \text{Jupiter}) , \quad \text{ocurrirá:}$$

$d(\text{Tierra, Jupiter}) = d(\text{Sol, Jupiter}) - d(T, S)$, i. e.:

$d(\text{Tierra, Jupiter}) = 5,2013.d(T, S) - d(T, S)$. De donde concluimos:

$d(\text{Tierra, Jupiter}) = 4,2013.d(T, S)$.

Esta unidad $d(T, S)$, la distancia media entre la Tierra y el Sol, es bien sabido que se denomina "unidad astronómica", y que se denota habitualmente por "u. a.". Tomando esta unidad como escala en el Sistema Solar, acabamos de descubrir que:

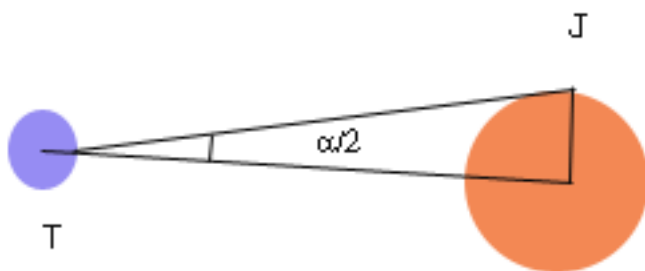
$d(\text{Sol, Júpiter}) = 5,2013$ u. a., y también que:

$d(\text{Tierra, Júpiter}) = 4,2013$ u. a. en su oposición, i. e. : cuando Sol, Tierra y Júpiter están alineados.

Pero vamos a utilizar esta escala, la u. a., no sólo para medir distancias entre planetas, también la vamos a utilizar para hacer las mediciones siguientes.

7.- Radio y volumen de Júpiter.

Habiendo medido la distancia entre Júpiter y la Tierra, con nuestra unidad de medida, y con anterioridad el tamaño angular del planeta, podemos considerar ahora la siguiente figura:



α = tamaño angular de Jupiter

Tenemos que obviar aquí, el hecho de que la distancia de la Tierra a Júpiter es la medida del segmento que une sus centros, mientras que el ángulo α está medido sobre la superficie terrestre. Si despreciamos este desfase, cosa asumible, pues el radio de la Tierra es despreciable respecto a la distancia que nos separa de Júpiter, para cuantificar lo que mide el radio de Júpiter con nuestra unidad de medida, podemos razonar como sigue:

Según la definición de la razón trigonométrica "tangente", ocurre:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r_J}{d(T,J)} \quad \text{donde: } r_J = \text{radio de Júpiter} \quad \text{y} \quad d(T,J) = \text{distancia}$$

Tierra-Júpiter.

$$\text{Deducimos de aquí: } r_J = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot d(T,J), \text{ i. e. :}$$

$$r_J = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 4,2013 \text{ u.a.}$$

Como tenemos dos medidas para α , una de 2.008 y otra de 2.009, podemos calcular r_J para los dos valores y después hacer un promedio.

$$\text{Para 2.008 obtengo que } r_J = 5,041 \cdot 10^{-4} \text{ u.a.}$$

$$\text{Para 2.009 } r_J = 5,063 \cdot 10^{-4} \text{ u.a.}$$

Un promedio de estas medidas nos da una estimación para r_J de

$$r_J = 5,052 \cdot 10^{-4} \text{ u.a.}$$

Una vez conocido el radio del planeta, que lo asociamos a su radio ecuatorial, pues es realmente el ángulo de mis mediciones. Dado que conocemos el valor de su achatamiento, podemos calcular su radio polar. Mis cálculos, a partir de la fórmula del achatamiento de Júpiter me dan un valor para el radio polar de $4,722 \cdot 10^{-4} \text{ u.a.}$

Si notamos por r_e al radio ecuatorial y por r_p al radio polar, pensamos ahora que Júpiter tiene la forma de un elipsoide, y recordamos que el volumen para un elipsoide de semiejes a , b y c nos viene dado por la

$$\text{expresión: } V = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot a \cdot b \cdot c$$

Obtenemos para el caso que nos ocupa, que el volumen de Júpiter vendrá

$$\text{dado por: } V_J = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot r_e^2 \cdot r_p. \text{ Y según mis cálculos se obtiene un volumen para}$$

$$\text{nuestro planeta de } V_J = 5,048 \cdot 10^{-10} (\text{u.a.})^3$$

8.- Tamaño de la Gran Mancha Roja (GRS).

Con nuestra escala, tomando medidas con la mayor precisión que sea posible sobre alguna fotografía del planeta y comparándolas con su radio, podemos obtener aproximaciones del tamaño de la Gran Mancha Roja (GRS).

Si suponemos para la GRS la forma de una superficie elíptica plana y medimos sus ejes con nuestra escala, podemos calcular incluso el área que ocupa sobre la superficie del planeta. Se puede mejorar la precisión de esta medida ahora, con conocimientos sobre Geometría diferencial.

Para la fotografía siguiente, tomada también el día 22 de Agosto de 2009, aunque ahora a $f/30$, obtengo los siguientes datos:



Para el eje mayor de la GRS obtengo una estimación de $1,263.10^{-4} u.a.$, y para el eje menor $7,894.10^{-5} u.a.$

Recordando que una elipse de semiejes a y b tiene por área: $A = \pi.a.b$, obtenemos para la GRS un área de: $A = 7,830.10^{-9} (u.a.)^2$

Aseguran los expertos, que está decreciendo en los últimos años. Es probable que esta variabilidad en sus dimensiones sea la causante de que no aparezcan sus medidas prácticamente en ninguna publicación. Los pocos libros que encuentro donde se da alguna medida, me hacen pensar, no obstante que mis mediciones no van muy desencaminadas. El seguimiento de estas medidas puede ser un buen entretenimiento para próximas oposiciones.

9.- Seguimiento de los satélites de Júpiter.

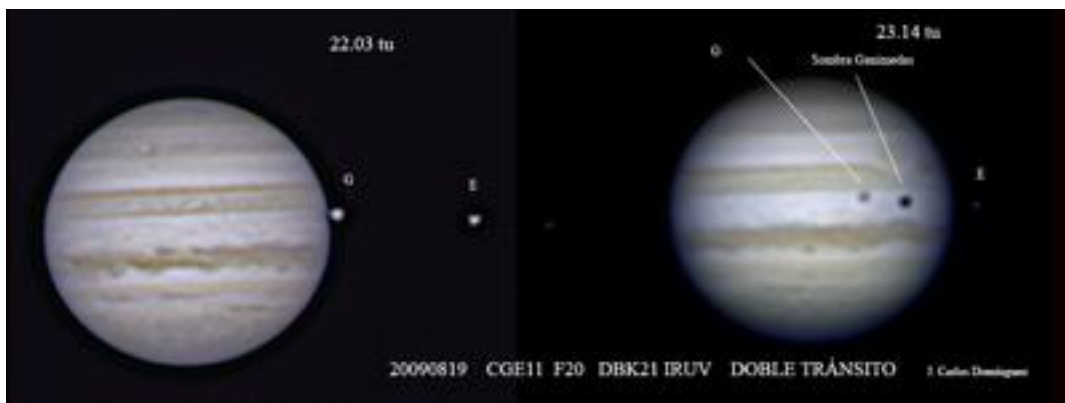
En muchos de los textos que tratan sobre el sistema solar, al referirse a los satélites Galileanos de Júpiter, se habla de dos momentos clave en la historia de la ciencia (y de la humanidad), en los que estos cuerpos tuvieron un protagonismo especial.

- El primer momento, fue en su propio descubrimiento, allá por 1.610, cuando su observación visual y su seguimiento confirmaron que no todos los cuerpos celestes orbitaban en torno a la Tierra, iniciando la caída definitiva del sistema geocéntrico.
- El segundo momento tiene que ver con la medición de la velocidad de la luz, efectuado por el joven astrónomo danés Olaus Römer en 1.676.

En la actualidad se conocen al menos 63 satélites orbitando alrededor de Júpiter, pero para los instrumentos que manejamos los aficionados, el estudio clásico se centra fundamentalmente en el seguimiento de los 4 satélites que descubrió Galileo. Y desde luego que no es un estudio que carezca de atractivo y entretenimiento, ni mucho menos.

Son de varios tipos los fenómenos mutuos que pueden protagonizar nuestros satélites junto con el planeta. En el texto de Comellas, "Guía del Firmamento", se citan los siguientes:

- Ocultación y reaparición de un satélite pasando por detrás del planeta.
- Tránsito de un satélite por delante del planeta.
- Proyección de la sombra de un satélite sobre el planeta.
- Eclipse de un satélite por la sombra de Júpiter.
- Ocultación de un satélite por otro.
- Eclipse de un satélite por la sombra de otro.



Dos momentos del doble tránsito de Europa y Ganímedes del día 19 de Agosto de 2.009

Considerando al planeta y sus satélites como una réplica en miniatura del sistema solar, se puede empezar estudiando los periodos orbitales de cada uno de ellos, la máxima elongación de su órbita y su movimiento angular.

Se requiere para hacer el seguimiento al menos 14 ó 15 días de observaciones diarias y de ellas, al menos 3 ó 4 días con un mínimo de 3 ó 4 observaciones por noche, espaciadas por 2 ó 3 horas.

En cada observación hay que medir de la forma más precisa posible la distancia que separa a cada uno de los satélites del planeta. Aunque se puede hacer con un ocular micrométrico y anotar en cada observación cada medida, es mucho más cómodo hacer tomas fotográficas, incluyendo en el campo de cada foto al planeta y a todos sus satélites, y desde luego es imprescindible hacer todas las observaciones con los mismos aparatos ópticos.



Una vez recopilada la información de todas las observaciones hay que identificar en cada una de ellas a todos los satélites. Quizás sea este el momento más delicado y más entretenido. Especialmente los satélites más cercanos al planeta nos vuelven locos con sus rápidas idas y venidas, por esto mi recomendación es empezar la identificación por los satélites más alejados.

Una vez identificados hay que hacer las mediciones y tabular las medidas. Podemos, para cada satélite individualmente, anotar la distancia que lo separa del centro de Júpiter en cada toma, anotando si está al Este o al Oeste del planeta. Para estas medidas, podemos tomar como unidad si nos parece el diámetro o el radio de Júpiter.

Una representación gráfica para el movimiento de cada satélite es lo que debemos hacer a continuación. Podemos representar unos ejes coordenados en el que anotamos en el eje de abcisas el tiempo. Para cada satélite quizá sea conveniente utilizar una escala diferente, para los satélites más cercanos registrar una vuelta completa alrededor del planeta no requiere tanto tiempo como requieren los más alejados, y por tanto nos puede ir bien, sin espaciar tanto los tiempos, por ejemplo una escala de 2 ó 3 horas para

Io puede ir bien, para Europa y Ganímedes unas 4 horas pueden bastar, mientras que para Calixto unas 6 horas pueden servir.

En el eje de ordenadas representamos la distancia a la que se encuentra el satélite correspondiente del centro del planeta. También aquí es conveniente ajustar diferentes escalas dependiendo del satélite, para los que se alejan menos, podemos seleccionar una escala y para los que más se alejan, otra. Podemos convenir también que el semieje de ordenadas positivo represente por ejemplo el Este y el de ordenadas negativo el Oeste.

Basta hacerse una idea de lo que estamos describiendo para entender que nos va a quedar una gráfica con aspecto sinusoidal, periódica, en la que serán bien visibles tanto la máxima elongación de cada satélite como su periodo orbital.

Con las fotografías tomadas durante la segunda quincena de Julio de 2.008 y el proceso descrito, obtengo los siguientes resultados:

Satélite	Periodo orbital	Máxima elongación (en Diámetros de Júpiter)
Io	P. orbital completo: De 12:30 h. de 20-07-08 A 7:00 h. de 22-07-08 $\cong 42h30m.$	$\frac{49}{16} \cong 3,0625$
Europa	Semiperiodo: De 16:00 h. de 19-07-08 A 11:00 h. de 21-07-08 Periodo: $\cong 86h.$	$\frac{76}{16} \cong 4,75$
Ganímedes	Semiperiodo: De 19:00 h. de 21-07-08 A 9:00 h. de 25-07-08 Periodo: $\cong 172h.$	$\frac{120}{16} \cong 7,5$
Calixto	Semiperiodo: De 15:00 h. de 19-07-08 A 22:00 h. de 27-07-08 Periodo: $\cong 398h.$	$\frac{210}{16} \cong 13,125$



10.- Resonancia de Laplace.

Ya hemos comentado, como Olaf Römer, en 1.676 determinó la velocidad de la luz estudiando los ocultamientos de Io por Júpiter, aunque desde antes incluso de este momento se había constatado la falta de periodicidad de los satélites en torno al planeta. Sin embargo hubo que esperar aún un tiempo para que esta falta de periodicidad se estudiara en profundidad.

Entre los que estudiaron este problema se encuentran:

- El astrónomo sueco Pehr Wargentin en colaboración con Lalande.
- Lagrange, quien recibiría en 1.766 el premio de la Academia de Ciencias de París por el estudio de las desigualdades apreciadas en sus movimientos, y
- Laplace, que consiguió demostrar que las perturbaciones eran periódicas y que el sistema era estable.

Obtuvo Laplace una relación entre los "movimientos medios" de los tres satélites Galileanos más cercanos al planeta.

Esta relación, que se conoce con el nombre de resonancia de Laplace, asegura lo siguiente:

Si notamos por:

p_1 = periodo de Io (en horas)

p_2 = periodo de Europa (en horas)

p_3 = periodo de Ganímedes (en horas).

Y por:

$$n_1 = \text{movimiento medio de Io} = \frac{2\pi}{P_1}$$

$$n_2 = \text{movimiento medio de Europa} = \frac{2\pi}{P_2}$$

$$n_3 = \text{movimiento medio de Ganímedes} = \frac{2\pi}{P_3}.$$

Se tiene entonces, que: $n_1 + 2n_3 = 3n_2$.

Con los datos que yo obtengo en mis mediciones:

$$n_1 = \frac{2\pi}{42,5} \text{ radianes} \cdot (\text{hora})^{-1} \cong 1,478 \cdot 10^{-1} \text{ radianes} \cdot (\text{hora})^{-1}$$

$$n_2 = \frac{2\pi}{86} \text{ radianes} \cdot (\text{hora})^{-1} \cong 7,306 \cdot 10^{-2} \text{ radianes} \cdot (\text{hora})^{-1}$$

$$n_3 = \frac{2\pi}{172} \text{ radianes} \cdot (\text{hora})^{-1} \cong 3,653 \cdot 10^{-2} \text{ radianes} \cdot (\text{hora})^{-1}$$

Con lo que tengo:

$$n_1 + 2n_3 \cong 2,2086 \cdot 10^{-1} \text{ radianes} \cdot (\text{hora})^{-1}$$

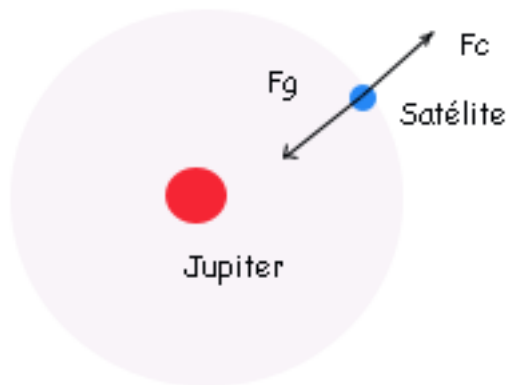
$$\text{Y } 3n_2 = 2,1918 \cdot 10^{-1} \text{ radianes} \cdot (\text{hora})^{-1}$$

Como vemos, aunque se aproximan bastante, me marco como reto afinar algo más los cálculos en la próxima oposición.

11.- Masa de Júpiter.

Llegados a este punto, para dar un paso más en el cálculo de nuevas medidas debemos hacer algunas consideraciones teóricas.

El autor Tomás Hormigo, en su libro "las medidas del universo", cuya lectura es altamente recomendable, muestra de una manera simplificada, como ha de ser el equilibrio de fuerzas entre el Sol y la Tierra para que la órbita de nuestro planeta se mantenga estable (bajo la suposición de que no hay ningún otro cuerpo interactuando en el sistema). Este estudio se puede adaptar sin problema al estudio del sistema formado por Júpiter (equivalente al Sol en el sistema Solar), y uno cualquiera de sus satélites (equivalente a la Tierra en el estudio de Hormigo).



Suponiendo la órbita del satélite circular, para que ésta se mantenga estable debe ocurrir que la fuerza con la que Júpiter atrae al satélite debe ser igual a la fuerza centrífuga con la que el satélite tiende a escapar. Si notamos por:

F_g a la fuerza con la que Júpiter atrae al satélite, que viene dada por la ley de gravitación universal de Newton.

F_c a la fuerza centrífuga del satélite.

m a la masa del satélite.

M a la masa de Júpiter.

R al radio de la órbita del satélite.

ω a la velocidad angular del satélite.

Tendremos:

$$F_g = G \frac{M.m}{R^2} \quad \text{donde } G \text{ es la cte. de la gravitación universal.}$$

$$F_c = m.\omega^2.R$$

Y como debe ocurrir: $F_g = F_c$ entonces:

$$G \frac{M.m}{R^2} = m.\omega^2.R \quad \text{i. e.: } G.M = \omega^2.R^3$$

$$\text{de donde: } M = \frac{\omega^2.R^3}{G}$$

También ocurre, si notamos por:

T al periodo del satélite alrededor de Júpiter, que: $\omega = \frac{2.\pi}{T}$, y por tanto:

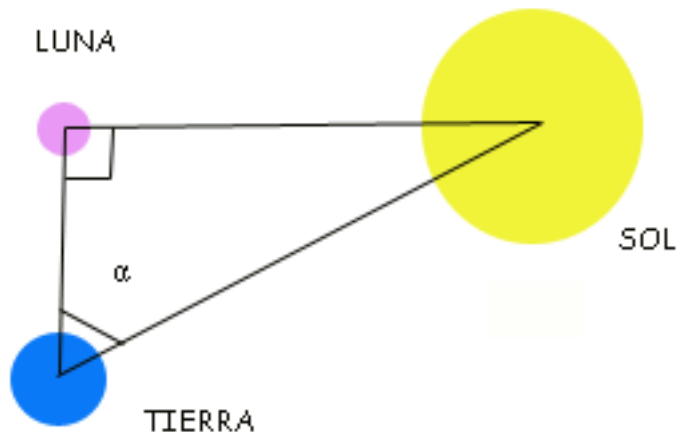
$$M = \frac{4.\pi^2.R^3}{G.T^2}.$$

De la expresión que aparece en el segundo miembro acabamos de determinar los valores de R y de T para cada uno de los satélites galileanos.

De la cte. de gravitación universal G vamos a suponer conocido su valor, pero creo que merece que hagamos un par de comentarios sobre ella:

- El primer comentario tiene que ver con su valor. El propio Newton no llegó a conocerlo. Tuvo que ser a raíz de un experimento del físico inglés Henry Cavendish en 1.798, quien determinó la densidad de la Tierra, cuando se determinó el valor de G . El valor que se acepta actualmente para nuestra cte. es $G = 6,67428 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot (kg)^{-1} \cdot (seg)^{-2}$. También se tiene conciencia de que no es de las constantes que conozcamos con mayor precisión.
- El segundo comentario tiene que ver con las unidades que se emplean. Mientras que las unidades de medida que aparecen en G son metros, para R las mediciones que tenemos tienen como unidad en última instancia la unidad astronómica, u. a. Hemos de poner, por tanto, de acuerdo estas unidades, i. e. hemos de ver la relación existente entre la u. a. y el metro.

Algunos textos se atreven a dar un método para medir la u. a. utilizando un triángulo de vértices: Luna-Tierra-Sol en el momento en que uno de los ángulos que se forman sea recto, concretamente en el cuarto creciente de la Luna.



En este justo momento habría que medir el ángulo α con precisión y además conocer al menos uno de los lados del triángulo. He intentado medir tal ángulo y reconozco que, yo al menos, no logro medirlo con la precisión que requiere.

He probado con otro método, que no he visto descrito en ningún texto, sin involucrar a la Luna, teniendo sólo en cuenta a la Tierra y al Sol y formando otro triángulo, pero vuelvo a encontrar el mismo problema, no logro medir los ángulos que intervienen con la suficiente precisión.

En el libro mencionado de Tomás Hormigo se encuentra un relato conciso y detallado sobre la historia de la medición de esta medida, y se entiende que no sea un dato que se obtenga con facilidad.

Lo que nos interesa a nosotros de cualquier manera, para seguir, es conocer el valor que se acepta en la actualidad para la u. a. Tal valor es de 149.597.870 Km. i. e.: 149.597.870.000 m.

Tenemos, a partir de ahora, datos para obtener 4 valores de la masa de Júpiter, uno por cada uno de los satélites galileanos.

Previamente vamos a hacer la traducción a Km. de algunas de las medidas calculadas hasta ahora.

	u.a.	km.
Radio ecuatorial de Júpiter	$5,052 \cdot 10^{-4}$	75.576,84
Radio polar de Júpiter	$4,722 \cdot 10^{-4}$	70.638,62
Radio medio de Júpiter	$4,887 \cdot 10^{-4}$	73.107,73
Distancia Sol-Júpiter	5,2013	778.103.401,2

Ahora, como los radios orbitales de los satélites están calculados en función del diámetro de Júpiter, calculado para el radio medio del planeta tenemos:

	u.a.	Km.
Radio orbital de Io	$2,989 \cdot 10^{-3}$	447.148,03
Radio orbital de Europa	$4,636 \cdot 10^{-3}$	693.535,73
Radio orbital de Ganímedes	$7,32 \cdot 10^{-3}$	1.095.056,41
Radio orbital de Calixto	$12,81 \cdot 10^{-3}$	1.916.348,71

Ahora ya, si que estamos en condiciones de calcular la masa de Júpiter: Utilizando Io, tendremos:

$$M_J = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (447.148.030m)^3}{6.67428 \cdot 10^{-11} \cdot (42,5.3600seg)^2 \cdot m^3 \cdot (kg)^{-1} \cdot (seg)^{-2}} = 2,259 \cdot 10^{27} kg$$

Utilizando Europa:

$$M_J = \frac{4 \cdot \pi^2 (693.535.730m)^3}{6,67428 \cdot 10^{-11} \cdot (86.3600seg)^2 \cdot m^3 \cdot (kg)^{-1} \cdot (seg)^{-2}} = 2,059 \cdot 10^{27} kg$$

Utilizando Ganímedes:

$$M_J = \frac{4.\pi^2.(1.095.056.410m)^3}{6,67428.10^{-11}.(172.3600seg)^2.m^3.(kg)^{-1}.(seg)^{-2}} = 2,026.10^{27} kg$$

Utilizando, por último, Calixto:

$$M_J = \frac{4.\pi^2.(1.916.348.710m)^3}{6,67428.10^{-11}.(398.3600seg)^2.m^3.(kg)^{-1}.(seg)^{-2}} = 2,028.10^{27} kg$$

Si hacemos un promedio de los 4 datos, obtenemos para Júpiter una masa de: $M_J = 2,093.10^{27} kg$

12.- Densidad de Júpiter.

Habiendo calculado su masa, para determinar la densidad de Júpiter, basta recordar que la definición de esta magnitud es "la masa por unidad de volumen", i. e.: $D = \frac{M}{V}$.

Para los datos obtenidos en el apartado anterior, en los que hemos determinado el radio ecuatorial y el radio polar de Júpiter en Km. y la masa en Kg., tendremos:

$$V_J = \frac{4.\pi}{3}.r_e^2.r_p = 1,690.10^{24} m^3$$

$$M_J = 2,093.10^{27} kg$$

De donde:

$$D_J = \frac{2,093.10^{27} kg.}{1,690.10^{24} m^3} = 1238,273 kg.m^{-3}$$

$$\text{O también: } D_J = 1,238 g.cm^{-3}$$

13.- Velocidad de escape.

Con los datos que conocemos ya sobre nuestro planeta, podemos plantearnos conocer algunas medidas más.

Se define la velocidad de escape de un planeta, como: "la mínima velocidad con la que un cuerpo debe ser lanzado para que pueda escapar de su atracción gravitatoria". Determinan los físicos tal velocidad, mediante la expresión:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2.G.M}{R}} \quad \text{siendo ahora:}$$

G la constante de gravitación universal.

M la masa del planeta.

R el radio del planeta.

Para el caso de Júpiter, tendremos:

$$v_{escape_j} = \sqrt{\frac{2.G.M_J}{r_J}} = \sqrt{3,821.10^9 m.(seg)^{-1}} = 61.815,585m.(seg)^{-1} = 61,816km.(seg)^{-1}$$

Para escapar de la atracción de Júpiter se necesita nada menos que una velocidad de casi $62km.(seg)^{-1}$ según nuestros cálculos.

Otras medidas que nos podemos plantear calcular y que están a nuestro alcance pueden ser la velocidad angular media del planeta a lo largo de su órbita, por ejemplo, ó la velocidad a la que gira un punto situado en el ecuador, o en algún paralelo. Hacer comparaciones de las distintas velocidades a las que se desplaza un punto del ecuador, con un punto situado en el paralelo $30^\circ N$, por ejemplo. En fin, como vemos una amplia variedad de medidas, algunas de ellas acompañadas incluso de alguna interpretación, como esta de las comparaciones de las velocidades.

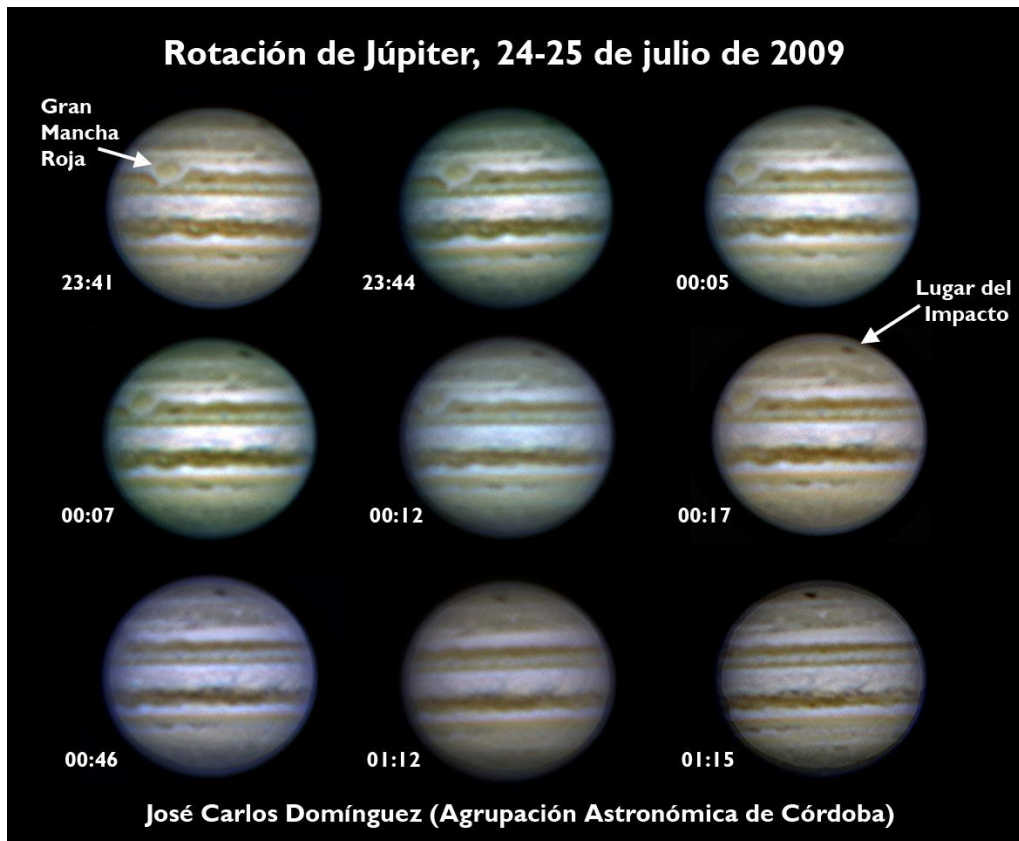
14.- Impacto de Julio de 2.009.

Por si el estudio rutinario del planeta no fuera lo suficientemente extenso y atractivo por el mismo, esta oposición de 2.009 nos ha obsequiado con un incentivo más:

El día 19 de Julio, el astrónomo aficionado Anthony Wesley, desde Australia, anunció el descubrimiento de una mancha negra aparecida en la región subpolar sur de Júpiter. Posiblemente se trataba de un impacto de un cometa o de un asteroide sobre la superficie joviana. El impacto fue confirmado por científicos del Laboratorio de propulsión de Pasadena (JPL).

La noche del 24 al 25 de Julio, aún con unas condiciones no muy favorables logré hacer una secuencia de la rotación del planeta. Sobre esta serie nos podemos hacer las siguientes preguntas:

- 1. ¿ En que latitud se ha producido el impacto?
- 2. ¿ Sigue la misma rotación del sistema II del planeta, la mancha del impacto ? o por el contrario ¿ tiene algún desfase con respecto a esta rotación ?.
- 3. ¿ Podemos precisar la forma y dimensiones en el momento de las fotografías?



Para las dos primeras preguntas, hemos descrito métodos específicos en las páginas precedentes que nos permiten poder calcular la latitud de la mancha y su periodo de rotación.

Vamos a empezar a hacerlo.

14.1.- Latitud del impacto.

Siguiendo el proceso descrito en el apartado 3 de estas páginas, aplicado a las 9 fotografías, obtengo para la mancha oscura del impacto la siguiente serie de latitudes: 55,852°S- 57,363°S- 52,476°S- 55,544°S- 55,544°S- 54,130°S- 52,476°S- 55,228°S- 55,228°S.

La media de todas las medidas (que siempre regulariza el resultado), que tomaremos como latitud de la mancha del impacto es: 54,871°S.

14.2.- Periodo de rotación de la mancha del impacto.

Dar respuesta a la segunda pregunta tal y como está formulada, no es fácil con los medios a nuestro alcance. En primer lugar no tenemos un valor exacto y seguro sobre el periodo de rotación del paralelo por donde transita la mancha del impacto. En segundo, aunque hubiera un pequeño desfase

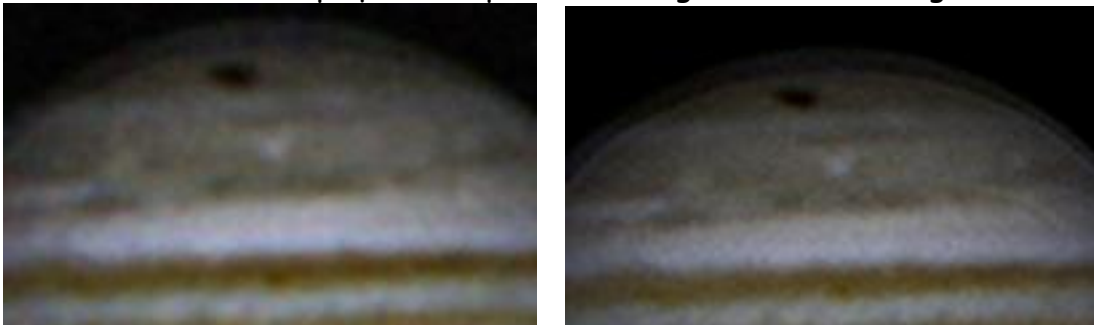
entre las rotaciones de este paralelo y la mancha, seguramente sería de una magnitud difícilmente detectable para nosotros.

Lo que si podemos, sin hacer comparaciones, es intentar determinar la rotación de la mancha sobre el planeta el día de las tomas.

Haciendo dos mediciones, una sobre el desplazamiento de la mancha entre las 00:17 t.u. y las 01:15 t.u. y otra sobre el desplazamiento entre las 01:17 t.u. y las 02:17 t.u. (esta segundas no aparecen en la secuencia expuesta), obtengo una media para el periodo de rotación del accidente en cuestión, de 9 horas y 53 minutos.

14.3.- Forma y dimensiones de la mancha del impacto.

Por último, una pequeña ampliación de algunas de las fotografías de la



secuencia, muestran una mancha con forma ovalada, de bordes (a esta escala, al menos) no muy irregulares y que en una primera aproximación podemos asociar a una elipse (sobre la superficie "esférica" del planeta) cuyos ejes podemos medir sin dificultad (basta compararlos con alguna longitud conocida para el planeta, por ejemplo su radio ecuatorial).

Obtengo para estas medidas los siguientes valores:

Para el eje mayor de la "elipse", haciendo un promedio de 3 medidas:

7.492,754192 Km.

Para el eje menor de la "elipse" con el promedio de las mismas 3 medidas: 2.497,584745 Km.

Muchas medidas quedan por tomar, y de las tomadas, todas admiten refinamiento. Pero esto lo dejaremos para próximas oposiciones.

Las referencias de las que he tomado casi todas las ideas, y las medidas que se aceptan en la actualidad para los objetos medidos, se encuentran en los siguientes lugares:

BIBLIOGRAFÍA:

- **EXPERIMENTOS DE ASTRONOMÍA**
Lars Broman, Robert Estalella, Rosa M^o Ros.
Biblioteca de recursos didácticos Alhambra.
- **LAS MEDIDAS DEL UNIVERSO**
Tomás Hormigo.
Ciudad de las artes y las ciencias, S. A.
- **GUIA DEL FIRMAMENTO**
José Luis Comellas.
Ediciones Rialp, S. A.
- **PLANETAS EXTERIORES**
Agustín Sánchez Lavega, Manuel Cruz.
Equipo Sirius, S. A.
- **GUIAS VISUALES ESPASA: ASTRONOMÍA**
Ian Ridpath
Espasa.
- **ATLAS DEL UNIVERSO**
Dr. Mark A. Garlick
Blume.
- **LAPLACE, EL MATEMÁTICO DE LOS CIELOS**
Javier Bergasa Liberal
Nivola.

La mayor fuente para corroborar datos actualizados han sido páginas de Internet.